4. Таңбасы ауыспалы қатарлар. Лейбниц теоремасы.

Осы уақытқа дейін мүшеоері оң таңбалы қатарларды қарастырдық. Енді таңбасы ауыспалы қатарларды қарастырамыз, яғни:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots$$

$u_1; u_2; u_3; u_4; \ldots$ оң таңбалы: қатарын қарастырамыз.

Лейбниц теоремасы: Егер

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots \quad .(u_n > 0)\ .(1)$$

таңбасы ауыспалы қатарының мүшелері:

$$u_1 > u_2 > u_3 > \ldots$$

теңсіздігін қанағаттандырса және

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

болса, онда $.(1)$ қатар жинақты болады, қосындысы оң таңбалы болады және бірінші мүшесінен аспайды.

4.1 – мысал. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ қатары жинақты қатар, себебі:

1) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \ldots$

2) $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Қатардың алғащқы n мүшесінің қосындысы:

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

қатар қосындысы s – тен $\frac{1}{n+1}$ шамасынан кем болатын шамаға айрықшаланады.

4.1 Таңбасы айнымалы қатарлар. Абсолютті және шартты жинақтылық.

Егер қатар мүщелері оң және теріс таңбалы болса, онда қатар таңбасы айнымалы қатар деп аталады.

Таңбасы ауыспалы қатар таңбасы айнымалы қатардың дербес түрі болады. Сөйтіп қатардың мүшелері $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ оң және теріс таңбалы болады.

1-Теорема. $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ (1) таңбасы айнымалы қатары берілсін. Егер берілген қатар мүшелерінің абсолютті шамаларынан құрылған

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots\ (2)$$

қатары жинақты болса, онда берілген таңбасы айнымалы қатар да жинақты болады.

Мысал 4.2 Қатар жинақтылығын зерттейік:

$\frac{\sin\alpha}{1^2} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \frac{\sin 3\alpha}{3^2} \ldots + \frac{\sin n\alpha}{n^2} + \ldots\ (3)$, бұл формуладағы $.\alpha$ - кез келген сан.

Шешуі: Келесі қатарларды қарастырайық:

$$\left|\frac{\sin\alpha}{1^2}\right|+\left|\frac{\sin 2\alpha}{2^2}\right|+\left|\frac{\sin 3\alpha}{3^2}\right|...+\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|+...\ (4)$$

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...\frac{1}{n^2}+...\ (5)$$

(5) қатар жинақты қатар, (4) қатардың мүшелері (5)қатардың сәйкес мүшелерінен үлкен емес, ендеше (4) жинақты қатар. Онда 1-теоремада айтылғандай (3) қатар да жинақты қатар болады.

Көрсетілген жинақтылық белгісі жинақтылықтың жеткілікті белгісі болады, бірақ қажетті емес. Себебі таңбасы айнымалы қатар мүшелерінің абсолютті шамаларынан құрылған қатар жинақсыз болсада, өзі жинақты болатын қатарлар кездеседі. Сондықтан абсолютті және шартты жинақтылық түсініктерін енгіземіз. Осы түсінік негізінде таңбасы айнымалы қатарларды классификациялаймыз.

Анықтама: Егер таңбасы айнымалы қатар мүшелерінің абсолютті шамаларынан құрылған

$$|u_1|+|u_2|+...+|u_n|+...\ (2)$$

қатар жинақты қатар болса, онда таңбасы айнымалы

$$u_1+u_2+...+u_n+...\ \ (1)$$

қатар абсолютті жинақты деп аталады.

Егер таңбасы айнымалы (1)қатар жинақты болып, оның мүшелерінің абсолютті шамаларынан құрылған (2) жинақсыз болса, онда таңбасы айнымалы (1)қатар шартты жинақты қатар деп аталады.

Сөйтіп, 1- теореманы: әрбір абсолютті жинақты қатар жинақты қатар деп айтуымызға болады.

4.3 – мысал: $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-...(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}.+...$ Қатарын жинақтылыққа зерттейік.

Шешуі. Лейбниц теоремасы бойынша:

1) $|1|>\left|-\frac{1}{2!}\right|>\left|\frac{1}{3!}\right|>...$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!}=0$

Таңбасы айнымалы қатар жинақты қатар. Енді қатардың абсолют шамаларынан құрылған қатарды қарастырамыз:

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}+...$$

Даламбер белгісін қолданайық:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1$$

Абсолют шамаларынан құралған қатар жинақты қатар, ендеше берілген жинақты қатар абсолютті жинақты қатар болады.

4.4 – мысал. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$.

Шешуі. Лейбниц белгісін қолдансақ:

1) $\dfrac{1}{\sqrt{n}} > \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$, яғни, қатар мүшелерінің тізбегі кемімелі;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ =0.

Берілген қатардың абсолют шамаларынан құрылған қатарды қарастырамыз: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, бұл қатар көрсеткіші $p = \dfrac{1}{2} < 1$ болатын Дирихле қатары, яғни жинақсыз қатар.

Ендеше, берілген қатар шартты жинақты қатар.

Абсолютті және шартты жинақты қатарлардың қасиеттері:

1) Егер қатар абсолютті жинақты қатар болса, оның мүшелерінің орнын ауыстырсақ та қатар абсолютті жинақты болады.

Бұл қасиет шартты жинақты қатарларға тән емес.

2) Егер қатар шартты жинақты қатар болса, онда А санын қандай деп алсақ та, қатар мүшелерінің орындарын қосындысы А болатындай араластыруға болады.

Сонымен қатар, мүшелерінің орындарын шартты жинақты қатар жинақсыз қатар болатындай араластыруға болады.